

المفضاء الطوبولوجي الجزئي

ليكن (X, τ) مفضاء طوبولوجي وليكن $A \subseteq X$
 هل يمكن تحويل A إلى مفضاء طوبولوجي وسيف؟
 * لنأخذ ما يسمى تطبيق الإدخال:

$$\tau_A : A \rightarrow X$$

المعرفة بالصيغة: $\forall x \in A, \tau_A(x) = x$

أي أن التطبيق الإدخال هو مفضاء التطبيق المضاد.

* أن نصف طوبولوجيا على A تجعل تطبيق الإدخال مستمراً تسمى الطوبولوجيا النسبية على A ويرمز لها بـ τ_A وتسمى أحياناً الطوبولوجيا τ على A .

سؤال:

كيف تبدو المجموعات المفتوحة في الطوبولوجيا النسبية $\tau_A(u) = u \cap A$
 وبالتالي الطوبولوجيا النسبية محلياً في أسرة المجموعات u بالقاطع مع A

$$\tau_A = \{ u \cap A \mid u \in \tau \}$$

* المجموعات المفتوحة في الفضاء الجزئي R :

في المجموعات الناتجة من تقاطع المجموعات المفتوحة الموجودة في الفضاء الكلي X مع R .

تكون المجموعة G مفتوحة في الفضاء الجزئي $A \iff$ وجدت مجموعة مفتوحة u

في الفضاء الكلي X (أي $u \in \tau$) بحيث $u \cap A = G$ عندئذٍ G مفتوحة

* وبشكل مشابه F مغلقة في $A \iff$ وجدت مجموعة مغلقة F في الفضاء الكلي X بحيث:

$$H \cap A = F$$

* تمرين:

برهن أن $\tau_A = \{ u \cap A \mid u \in \tau \}$ طوبولوجيا

لنأخذ أسرة $\{ u_\alpha \mid \alpha \in I \}$ من عناصر τ_A والمطلوب إثبات أن $\bigcup u_\alpha \in \tau_A$

برهن ذلك بالشكل حسب التعريف:

توجد مجموعة مفتوحة u في X بحيث: $u \cap A = \bigcup u_\alpha$ ومنه

$$\bigcup u_\alpha = \bigcup (u_\alpha \cap A) = (\bigcup u_\alpha) \cap A$$

حسب تعريف اجتماع مجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة

$$\emptyset \cap A = \emptyset$$



$$X \cap A = A \quad \text{أي أن } X \text{ قطار طوبولوجيا}$$

* أمثلة:

$$A = [1, 5] \text{ الفضاء الطوبولوجي وأخذ}$$

سحب كل من المجموعتين المفتوحة في R ؟

$$U \text{ تقاطع المجموعتين المفتوحة في } R \text{ مع } A \text{ لو أخذنا في وجه } U =]3, 5[$$

$$U \cap A = [1, 3] \text{ يجب أن يكون مجموعة مفتوحة في } A$$

نلاحظ:

أن المجموعات المفتوحة في الفضاء الترتيبي ليس من الضروري أن تكون مفتوحة في الفضاء الكلي:

$$U \cap A =]2, 4[\quad \text{و} \quad U =]2, 4[\quad \text{كل}$$

المجموعة المفتوحة في الفضاء الترتيبي هي مفتوحة في الفضاء الكلي.

* لنأخذ في مجموعة جزئية من الفضاء R

$$U \cap Z = \{1\} \quad \text{و} \quad U =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$$

المجموعة وحيدة العنصر هي مجموعة مفتوحة في الفضاء الترتيبي Z وليس مجموعة مفتوحة في الفضاء الكلي R .

أسرة المجموعات وحيدة العنصر تشكل طوبولوجيا نسبية وبالتالي الطوبولوجيا Z طوبولوجيا متويزة لأن المجموعات وحيدة العنصر مفتوحة.

أثر الطوبولوجيا العادية على Z هو طوبولوجيا متويزة.

لنأخذ (x, τ) مقطع τ - متويزة

$$\forall x \in A \text{ و } \{x\} \in \tau$$

لأن $\{x\}$ مجموعة وحيدة العنصر وهي مجموعة مفتوحة أي أن أثر الطوبولوجيا التويزة طوبولوجيا متويزة

لتكن (x, τ) غير مقطع τ - ضعيفة

$$\tau = \{\emptyset, X\}$$

$$\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\} = \{\emptyset \cap A, X \cap A\} = \{\emptyset, A\}$$

أي أن أثر الطوبولوجيا الضعيفة طوبولوجيا ضعيفة

* لنأخذ (R, τ) حيث:

$$\tau = \{W \subseteq R, 1 \in W\} \cup \{\emptyset\}$$



ولكن لدينا $A =]2, 5[$

$$\tau_A = \{u \cap A, u \in \tau\}$$

$\forall x \in A$ لدينا $\{x\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الكلي

وبالتالي $\{x\} \cap A = \{x\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي A حسب التعريف.

أي المجموعات وحيدة المنفر في A هي مجموعات مفتوحة وبالتالي الطوبولوجيا الناتجة طوبولوجيا متويزة

* لنأخذ (R, τ) حيث:

$$\tau = \{u \in R; 1 \in u\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\tau_A = \{u \cap A; u \in \tau\}$$

ولكن لدينا $A = [0, 5]$

* ملاحظة:

كل من 0 و 1 -- تحتوي الواحد

* لنأخذ (R, τ) حيث:

$$\tau = \{u \in R; 1 \in u\} \cup \{\emptyset\}$$

ولكن لدينا $\mathbb{Z} = A$

$$\tau_A = \{u \cap A; u \in \tau\}$$

* لنفرض (X, τ) فضاء طوبولوجي، A عضو جزئي من X و $A \subseteq X$ و B مجموعة جزئية من A .

$$\tau_A = \{u \cap A; u \in \tau\} \text{ و } B \subseteq A$$

فيكون أن نرمز لـ B طوبولوجيا نسبية بطريقتين

- يمكن أن نعرف على الطوبولوجيا النسبية طوبولوجيا جزئية من A و يبرهن بسهولة:

$$\tau_B = (\tau_A)_B$$

و يبرهن بسهولة أن $\tau_B = (\tau_A)_B$ بسهولة حسب التعريف فهو طوبولوجيا نسبية

على τ .

لاحظنا أن المجموعات المفتوحة (المغلقة) بالفضاء الجزئي ليس من الضروري أن تكون مجموعة

مفتوحة (مغلقة) في الفضاء الكلي ولكن هنا تختلف! إذا كانت المجموعة A مجموعة مفتوحة

بالأصل أي مغلقة.

طوبولوجيا نسبية (A, τ_A) مجموعة جزئية من فضاء طوبولوجي جزئي

* نتيجة:

ليكن A فضاء جزئياً من فضاء طوبولوجي X و B مجموعة جزئية من A و $B \subseteq A$

و لنفرض A مفتوحة، عندئذ: B مفتوحة في A إذا وفقط إذا كانت B مفتوحة في X

البرهان:

نقترح أن B مفتوحة في A هنا يعني توجد مجموعة مفتوحة U في X مثل $U \cap A = B$.

بما أن A مفتوحة في X فإن $U \cap A = B$.

نقترح أن B مفتوحة في X يكون $B \cap A$ مجموعة مفتوحة في A $B \subseteq A$ مفتوحة في A .

والتي نقف بها في حالة A مغلقة.

البرهان:

ليكن A مغلقة في X جزء من الفضاء الطوبولوجي X و B مجموعة جزئية من A و $B \subseteq A$ و $X \in A$.

تكون المجموعة B حوارة للنقطة x في A إذا وفقط إذا وجد حوار U في X بحيث يكون:

$$U \cap A = B$$

ما يتطلبه من المجموعات المفتوحة بنظرية المجموعات.

البرهان:

نقترح أن حوار U في A وبالتالي حسب التعريف يوجد مجموعة مفتوحة U في A بحيث:

$$U \cap A = B$$

وبالتالي توجد مجموعة مثل G مفتوحة في X بحيث $G \cap A = U$.

أن المجموعة $U \cap B = G \cap B$ في حوار للنقطة x في الفضاء الكلي. ونحقق:

$$U \cap A = (G \cap A) \cap A$$

$$= G \cap A \cup B \cap A = U \cup B = B$$

نقترح أن B مجموعة جزئية من A و U حوار U في الفضاء الكلي X بحيث:

$$U \cap A = B$$

بما أن U حوار فيوجد U مجموعة مفتوحة في A .

$$U \cap A \subseteq U$$

$$U \cap A \subseteq U \cap A = B$$

مفتوحة في A وهذا يعني أن B حوار في A .

النتيجة:

1- ليكن A مغلقة جزئي في الفضاء الطوبولوجي X إذا كانت الأسرة $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ حلة الساحة

لحوارات النقطة x في الفضاء الكلي X فإن:

الأسرة $\{U_\alpha \cap A\}_{\alpha \in I}$ تشكل حلة أساسية لحوارات النقطة x في الفضاء الجزئي A .

2- إذا كانت الأسرة $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ حلة للفضاء الكلي X فإن الأسرة $\{U_\alpha \cap A\}_{\alpha \in I}$ حلة للفضاء

الجزئي A .